# Uzdevums 1 Spiegu problēma (BW 1994)

Tartu pilsētā ir 16 spiegi. Katrs no tiem novēro kādus no citiem spiegiem. Ir zināms, ka, ja A vēro B, tad B nevēro A. Tāpat ir zināms, ka katrus 10 no spiegiem var sarindot ciklā tā, ka tie cikliski vēro nākošo. Pierādiet, ka arī katrus 11 spiegus var sarindot ciklā!

# Uzdevums 2 Ceļošana (BW 2010)

Ceļotājlandē ir vairākas pilsētas, viena no tām ir galvaspilsēta. Starp katrām divām pilsētām ir tiešs avioreiss ar vienādu lidojuma cenu abos virzienos. Zināms, ka visi veidi, kuros var apceļot visas pilsētas, katru apmeklējot tieši vienu reizi, izmaksā vienādi. Pierādiet, ka visi veidi, kuros var apceļot visas pilsētas, izņemot galvaspilsētu, un atgriezties ceļojuma sākumpunktā, arī izmaksā vienādi!

# Uzdevums 3 Matemātiķu kliķes (imo 2007, uzd. 3)

Matemātikas olimpiādē daži dalībnieki ir savstarpēji draugi. Dalībnieku grupu, kurā katri divi dalībnieki ir draugi, sauc par kliķi. Ir zināms, ka konkrētajā olimpiādē lielākās kliķes izmērs ir pāra skaitlis. Pierādiet, ka dalībniekus var sadalīt divās zālēs tā, ka vienas zāles lielākās kliķes izmērs ir vienāds ar otras zāles lielākās kliķes izmēru!

# Uzdevums 4 Škvarku problēma (imo 2013, SL C3)

Profesors Hamons nejauši savā laboratorijā atklāja jaunu elementārdaļiņu – *škvarku*. Škvarki var būt savā starpā pa pāriem *sapīti*. Viens škvarks var būt vienlaicīgi sapīts ar vairākiem citiem. Profesors arī ir iemanījies veikt sekojošas darbības ar škvarkiem:

1. Škvarku, kurš ir sapīts ar nepāra skaitu citu škvarku, var iznīcināt.
2. Ir iespējams visus laboratorijā esošos škvarkus dublicēt, katram škvarkam *Š* izveidojot tā kopiju *Š’*. Jaunizveidotie škvarki *Š’* un *T’* ir sapīti tad un tikai tad, ja atbilstošie S un T ir sapīti. Papildus, jaunizveidotais *Š’* vienmēr būs sapīts ar *Š*. Citas sapīšanās šīs operācijas laikā neveidojas un nepazūd.

Pierādiet, ka Hamons var, izmantojot šīs divas operācijas, no savas škvarku kolekcijas iegūt tādu, kurā nevieni divi škvarki nav sapīti!

# Uzdevums 5 Asociālu matemātiķu problēma (imo 2015, SL C7)

Matemātiķu konferencē, daži dalībnieku pāri ir savstarpēji ienaidnieki. Matemātiķu grupu sauksim par *asociālu*, ja tajā ir nepāra skaits cilvēku (vismaz 3) un ir iespējams tos sasēdināt apkārt apaļam galdam tā, ka katri blakussēdošie matemātiķi ir ienaidnieki. Ir zināms, ka šajā konferencē ir ne vairāk kā 2015 asociālu grupu. Pierādiet, ka ir iespējams sadalīt matemātiķus 11 telpās tā, ka nevienā telpā neatrodas divi ienaidnieki!

# Uzdevums 6\* Paziņu problēmas paplašinājums (A.W. Goodman, 1959)

Labi zināms 😊, ka katru 6 cilvēku vidū ir sastopami vai nu 3 savstarpēji pazīstami, vai 3 savstarpēji nepazīstami cilvēki (eksistē *kliķe* ar izmēru 3).

Pierādiet, ka patiesībā 6 cilvēku starpā eksistē vismaz 2 kliķes ar izmēru 3!